ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE — CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ELEVES PILOTES DE LIGNE — Epreuve de Mathématiques

Durée : 4 heures

Coef : 7

Les candidats doivent traiter deux, et deux seulement, des trois problèmes proposés à leur choix.

1ER PROBLEME : (ALGEBRE)

Soit E l'ensemble des matrices de la forme M (a, b, c) = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{bmatrix}$ où a, b et c sont trois réels quelconques

1°) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées réelles de type (3, 3). En donner la dimension et une base.

2°) Montrer que E est un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Ce sous-anneau est-il commutatif ? Est-il unitaire ?

3°) Mettre le déterminant de M (a, b, c) sous la forme d'un produit de trois facteurs linéaires par rapport à a, b et c.

4°) A quelle condition la matrice M (a, b, c) admet-elle une inverse ? La calculer quand elle existe ; appartient-elle à l'ensemble E ?

5°) Montrer que le sous-ensemble de E formé des matrices M de rang ≤ 2 est constitué de 3 plans vectoriels p_1, p_2, p_3, et donner une base de chacun d'eux.

6°) Montrer que le sous-ensemble de E formé des matrices M de rang 1 est constitué de 3 droites vectorielles D_1, D_2, D_3, que l'on précisera. Comment sont situées ces droites par rapport aux plans p_1, p_2, p_3 ?

7°) On considère toutes les matrices M du plan p_1 qui sont effectivement de rang 2 ; on leur associe un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique. Montrer que tous ces endomorphismes ont le même espace image et le même noyau, et que cet espace image et ce noyau sont supplémentaires.
Résoudre la même question pour les matrices de rang 2 des plans p_2, puis p_3.

8°) Soit p la matrice de E définie par a=1, b=o, c=-3.Etablir une relation linéaire entre p^2, p et I, matrice unité. En déduire la matrice inverse p^{-1}.

9°) Calculer le reste dans la division euclidienne de x^n par x^2-2x-8. En déduire, pour n entier, la matrice p^n en fonction des matrices p et I.

10°) La formule trouvée au 9°) reste t'elle valable si n est un entier négatif ?

2EME PROBLEME : (ANALYSE)

Soit a un nombre réel strictement compris entre o et $\pi/2$. On se propose d'étudier la fonction f qui au réel x associe le réel y=f(x) défini par la relation :

$f(x) = \text{Arc sin } \dfrac{2(x-\cos a)\sin a}{x^2-2x\cos a+1}$ On pose $u(x) = \text{Arc tg } \dfrac{x-\cos a}{\sin a}$

1°) Préciser l'ensemble de définition des fonctions f et u.

2°) Montrer qu'à toute valeur de u strictement comprise entre $-\pi/2$ et $+\pi/2$ correspond une valeur unique de y=f(x) ; soit g la fonction qui à u fait correspondre y.
Donner une représentation graphique de g.

Tournez la page S. V. P.

3°) a) En déduire les variations de la fonction f, donner le tableau de ces variations

b) Représenter graphiquement par une courbe C, dans un repère orthonormé, la fonction y=f(x). La courbe C a-telle un centre de symétrie ?

c) Préciser les demi-tangentes à droite et à gauche à la courbe C au point A d'ordonnée $\pi/2$, et la tangente au point d'ordonnée 0.

4°) Une parallèle à l'axe ox, d'équation y=h avec h strictement compris entre o et $\pi/2$, coupe la courbe C en deux points M_1 d'abscisses x_1, M_2 d'abscisse $x_2 > x_1$.

a) Calculer en fonction de h les abscisses x_1 et x_2

b) Soit p le milieu de M_1 M_2. Déterminer et construire la courbe Γ décrite par le point p lorsqu'on fait varier h entre o et $\pi/2$. Quelle est la position limite du point p quand h tend ver $\pi/2$? On complète la courbe Γ en lui adjoignant ce point. Préciser alors la demi-tangente à Γ en ce point.

c) Calculer l'aire de la portion de plan comprise entre le segment M_1, M_2 et les arcs $\overset{\frown}{AM_1}$ et $\overset{\frown}{AM_2}$ de la courbe C.

TROISIEME PROBLEME : (GEOMETRIE)

Le plan euclidien est rapporté à 2 axes orthonomés Ox, Oy. On se donne les points A de coordonnées (-a,o) et A' de coordonnées (a,o), et les droites D d'équation x=-a, et D' d'équation x=a. On suppose $a > o$.
Un point M a pour coordonnées polaires par rapport à l'axe polaire ox les nombres $\rho > o$ et θ strictement compris entre o et π . On a donc OM= ρ et $(\vec{ox},\vec{OM}) = \theta$ à 2π près
La droite Δ perpendiculaire en M à OM coupe la droite D en R, et la droite D' en S
On note enfin r et s les ordonnées de R et de S respectivement.

1°) a) Calculer r et s en fonction de a, de ρ et de l'angle θ.

b) La distance a est supposée constante dans toute la suite du problème. On suppose que ρ et θ varient de telle façon que r-s reste constant. Quel est alors l'ensemble des points M ? Comment varie la droite Δ?

c) On suppose que r+s reste constant. Comment varie la droite Δ? Quel est l'ensemble des points M ?

2°) a) Calculer la distance RS en fonction de a, ρ et θ

b) Soit k un nombre positif constant donné. Quel est l'ensemble des points M tels que r+s = k. RS ? Préciser cet ensemble lorsque k=1.

c) Montrer que r+s = RS si et seulement si $r.s = a^2$. Que dire dans ce cas des droites OR et OS ?

3°) a) Calculer en fonction de a, ρ et θ les pentes des droites AM et A'M (c'est à dire leurs coefficients angulaires).

b) Montrer que l'angle des droites AM et A'M est toujours égal à l'angle des droites OS et OR.

c) Quel est l'ensemble des points M tels que les droites OS et OR restent perpendiculaires ?

4°) On suppose dans cette question que $r^2 - s^2 = 4a^2$

a) Déterminer et construire la courbe Γ décrite par le point M.

b) Soit I le point d'intersection de la droite Δ et de la perpendiculaire menée par le point A à la droite AS. Calculer les coordonnées de I en fonction de a et de θ.

c) Montrer que I décrit une parabole p. Préciser le foyer et la directrice de p

d) Quelle est la position de Δ par rapport à la parabole p ?